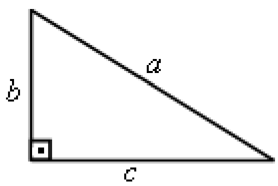
TRIGONOMETRIA

A trigonometria tem sua origem no estudo das relações entre medidas de ângulos e lados nos triângulos retângulos e a aplicação dessas relações nos demais cálculos geométricos.
Começaremos nossos estudos com algumas definições e que servirão de bases para um bom entendimento da trigonometria.

TRIÂNGULO RETÂNGULO

É o triângulo em que um dos ângulos é reto (90º).



ELEMENTOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

- $a \rightarrow$ **HIPOTENUSA**
- $\begin{cases} b \\ c \end{cases} \rightarrow$ **CATETOS**

Teorema de Pitágoras

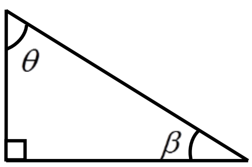
$$\boxed{(Hipotesusa)^2 = (Cateto)^2 + (Cateto)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

II) ÂNGULOS INTERNOS DO TRIÃNGULO RETÂNGULO

A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180º.
No triângulo retângulo abaixo, temos que:



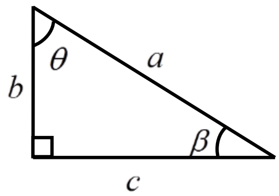
$$\begin{cases} \theta + \beta + 90^0 = 180^0 \\ \theta + \beta = 90^0 \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO1:

Quando a soma de dois ângulos é igual a 90° dizemos que eles são complementares, portanto: θ e β são ângulos complementares.

OBSERVAÇÃO2:

Dependendo do ângulo agudo considerado, os catetos recebem nomes específicos.



*** Com relação ao ângulo β temos que:**

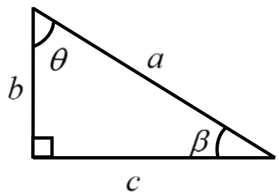
$b \rightarrow$ **CATETO OPOSTO.**
$c \rightarrow$ **CATETO ADJACENTE.**

*** Com relação ao ângulo θ temos que:**

$b \rightarrow$ **CATETO ADJACENTE.**
$c \rightarrow$ **CATETO OPOSTO.**

III) RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

São representadas pelas razões existentes entre os lados do triângulo retângulo.
No triângulo retângulo abaixo temos as seguintes razões trigonométricas:



- $Sen\beta = \dfrac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa} = \dfrac{b}{a}.$
- $Cos\beta = \dfrac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa} = \dfrac{c}{a}.$
- $Tg\beta = \dfrac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente} = \dfrac{b}{c}.$

Da mesma forma temos também que:

- $Sen\theta = \dfrac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa} = \dfrac{c}{a}.$
- $Cos\theta = \dfrac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa} = \dfrac{b}{a}.$

- $Tg\,\theta = \dfrac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente} = \dfrac{c}{b}.$

OBSERVAÇÃO:

- $Sen\beta = Cos\theta$
- $Cos\beta = Sen\theta$
- A tabela a seguir fornece os valores dos senos, cossenos e tangentes dos ângulos de 30°, 45° e 60°. Sua memorização é recomendada, uma vez que esses valores, como dissemos, são frequentemente utilizados.

	30°	**45°**	**60°**
Sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$

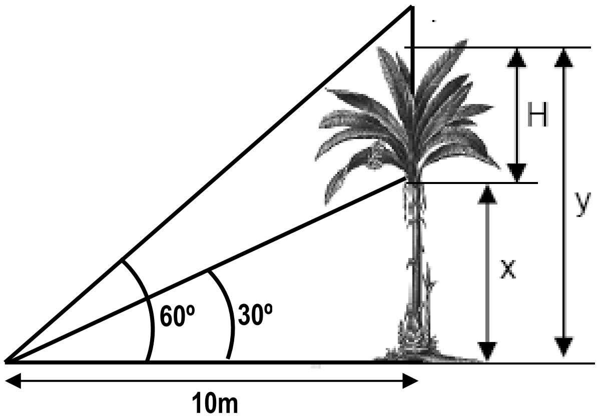
EXERCÍCIOS

1) Em um recente vendaval, um poste de luz de 9 metros de altura quebrou-se em um ponto a distância x do solo. A parte do poste acima da fratura inclinou-se e sua extremidade superior encostou-se ao solo a uma distância de 3 m da base do mesmo. A que altura x do solo o poste quebrou?

2) O comprimento da diagonal do quadrado de perímetro 24cm é :

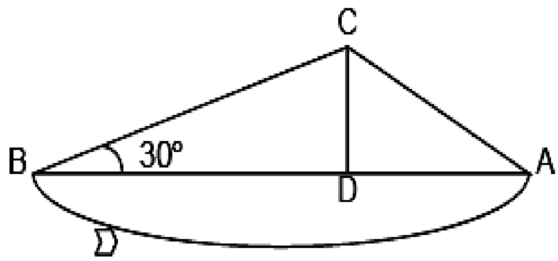
A) $\sqrt{72}$ B) 12 C) $\sqrt{12}$ D) $\sqrt{24}$ E)15

3) Um botânico interessado em descobrir qual o comprimento da copa de uma árvore fez as observações indicadas na figura abaixo a partir de um ponto no solo. O comprimento (H), em metros, dessa copa é:



A) $10\left(\sqrt{3}-1\right)$ B)15 C) $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ D) $10\left(\sqrt{3}+1\right)$ E)30

4) O mastro $\left(\overline{CD}\right)$ de um navio é preso verticalmente por cabos de aço fixo na proa (A) e na popa (B), conforme mostra a figura a seguir. Se o cabo $\overline{BC}$ mede $10\sqrt{3}$ m então, a altura do mastro é:



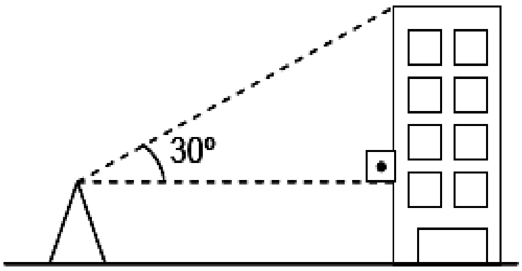
A) $2\sqrt{3}$ m B) $5\sqrt{3}$ m C) $8\sqrt{3}$ m D) $10\sqrt{3}$ m E) $20\sqrt{3}$ m

5) A Rua Tenório Quadros e a avenida Teófilo Silva, ambas retilíneas, se cruzam segundo um ângulo de 30º. O posto de gasolina Estrela do Sul se encontra na Avenida Teófilo Silva a 4000 m do citado cruzamento. Portanto, a distância entre o posto de gasolina Estrela do Sul e a Rua Tenório Quadros, em quilômetros, é igual a:

A) 4 B) 12 C) 2 D) 5 E) 8

6) Um topógrafo foi chamado para obter a altura de um edifício. Para fazer isto, ele colocou um teodolito (instrumento para medir ângulos) a 200 m do edifício e mediu o ângulo de 30º, como indicado na figura a seguir:

Use: $\sqrt{3} = 1{,}7$

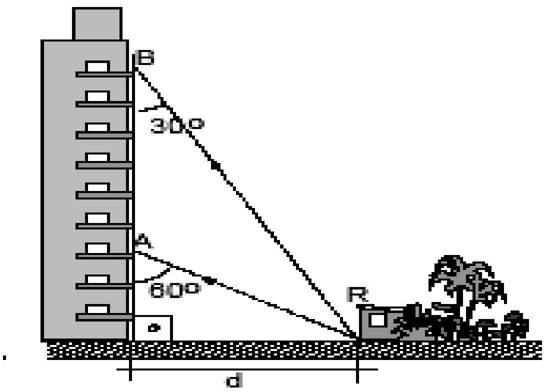


Sabendo que o teodolito está a 1,5 m do solo, pode-se concluir que, dentre os valores a seguir, o que melhor aproxima a altura do edifício, em metros, é:

A) 112 B) 115 C) 117 D) 120 E) 124

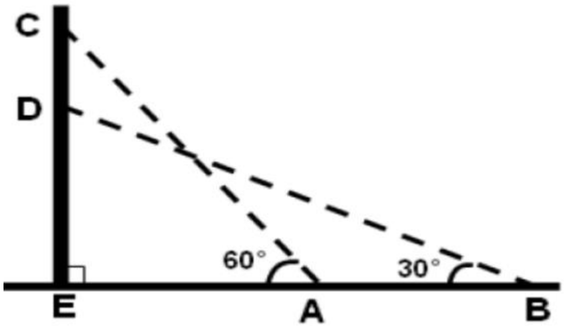
7) Patrik, um jovem curioso, observa da janela do seu quarto (A) uma banca de revistas (R), bem em frente ao seu prédio, segundo um ângulo de 60º com a vertical. Desejando avaliar a distância do prédio à banca, Patrik sobe seis andares (aproximadamente 16 metros) até o apartamento de um amigo seu, e passa a avistar a banca (do ponto B) segundo um ângulo de 30º com a vertical. Calculando a distância "d", Patrik deve encontrar, aproximadamente, o valor:

(Dados: $\sqrt{2}$ = 1,4 e $\sqrt{3}$ = 1,7)



A)8m B)11,2m C)12,4m D)13,6m E)15,0m

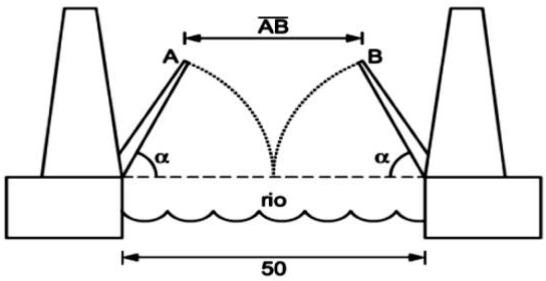
8) Para apanhar uma embalagem PET numa prateleira de uma loja, o vendedor apoiou uma escada cujo pé está no ponto A, formando um ângulo de 60° com o solo, porém, ao se aproximar da prateleira, houve um deslize da escada, deslocando seu pé para o ponto B e formando desta forma um ângulo de 30° com o solo, conforme a figura abaixo.



Se a escada $\overline{AC}$ mede $4\sqrt{3}$ m e $\sqrt{3}$ = **1,73**, a distância ***CD*** mede:

A)1,73 B)2,54 C)3,46 D)4,27 E)5,67

9) Uma ponte levadiça, com 50 metros de comprimento, estende-se sobre um rio. Para dar passagem a algumas embarcações, pode-se abrir a ponte a partir de seu centro, criando um vão AB, conforme mostra a figura abaixo.



Considerando que os pontos A e B têm alturas iguais, não importando a posição da ponte, responda a questão abaixo. Se o tempo gasto para girar a ponte em 1º equivale a 30 segundos, qual será o tempo necessário para elevar os pontos A e B a uma altura de 12,5 m, com relação à posição destes quando a ponte está abaixada?

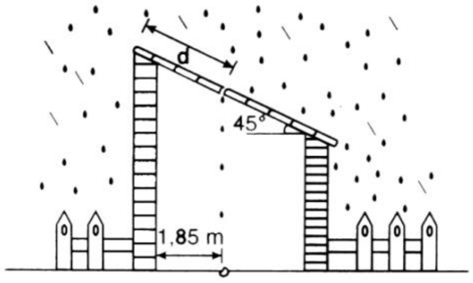
a) 5min b)10min c)15min d) 20min e)25min

10) Um caçador avista um pato voando em direção horizontal, a uma altura h do solo. Inclina sua arma 60° e da o primeiro disparo, que atinge a ave de raspão, abaixa a arma para 30° e da o segundo disparo, que atinge a ave em cheio. A distância percorrida pela ave, supondo que manteve o vôo na horizontal foi de:

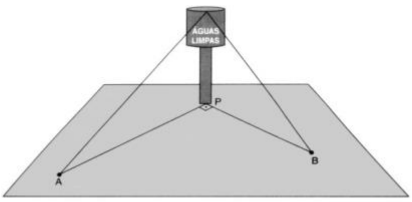
A) 30m B) 2m C) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}m$

D) $\frac{h}{3}m$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}m$

11) Uma telha de um galinheiro quebrou. Em dias chuvosos, uma goteira produz no chão, embaixo da telha quebrada, uma pequena poça de água, a 1,85 m de uma das paredes do galinheiro, conforme a figura. Considerando que a espessura dessa parede é 15 cm e que *d* é a distância entre o ponto mais alto do telhado e a quebra da telha, calcule, em metros, $d^2 + 20$.



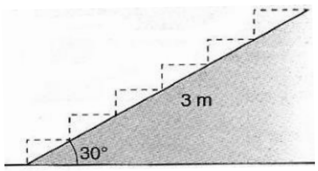
12) Uma caixa-d'água está localizada num ponto *P* de um terreno plano, conforme representado abaixo. Ela é avistada do ponto *A* sob um ângulo de 30º e do ponto *B* sob um ângulo de 45º. Sabendo-se que a medida do ângulo $A\hat{P}B$ é 90º e a distância entre os pontos *A* e *B é* 100 m, calcule, em metros, a altura da caixa-d'água.



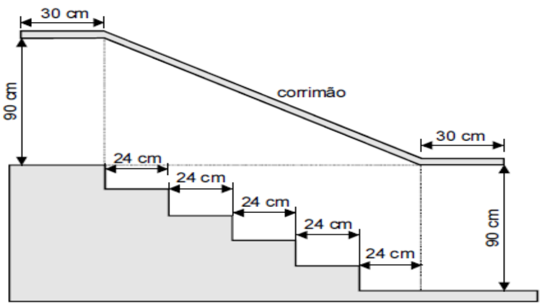
A)30 B)45 C)60 D)50 E)40

13) Dois níveis de uma praça estão ligados por uma rampa de 3 metros de comprimento e 30º de inclinação, conforme a figura abaixo. Deve-se construir sobre a rampa 6 degraus de mesma altura. A altura de cada degrau, em metro, será:

A) 2,20 B) 0,23 C) 0,25 D) 0,27 E) 0,28m



14) A figura abaixo, representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão e igual a:

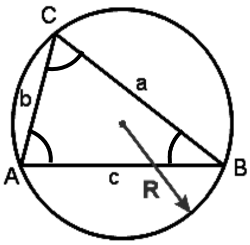


A) 1,8 B) 1,9 C) 2,0 D) 2,1 **E)** 2,2

RESOLUÇÃO DE TRIÃNGULOS QUAISQUER.

I- LEI DOS SENOS

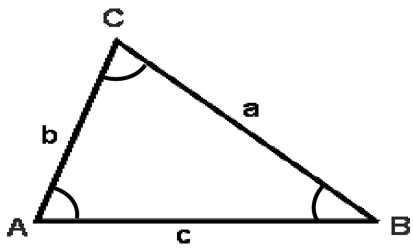
Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual a medida do diâmetro da circunferência circunscrita.



$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} = 2R$$

II- LEI DOS COSSENOS

Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vezes produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



- $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$

- **$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \hat{B}$**

- **$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$**

III- TEOREMA DA ÁREA

A área de um triângulo qualquer é igual à metade do produto de dois de seus lados pelo seno do ângulo compreendido entre eles.

- **No caso de serem dados apenas os lados A e B:**

$$S = \frac{A.B.Sen\theta}{2}$$

- **No caso de serem dados apenas ao lados A e C:**

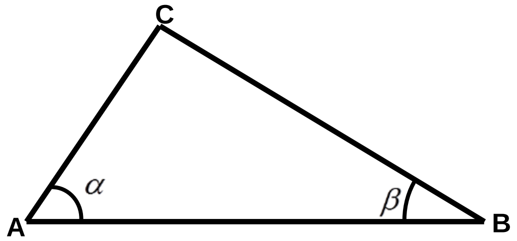
$$S = \frac{A.C.Sen\beta}{2}$$

- **No caso de serem dados apenas os lados B e C:**

$$S = \frac{B.CSen\alpha}{2}$$

EXERCICIOS

1) No triângulo abaixo, AC = 4m, BC = 3m e β = 60º. Calcule $Sen\alpha$.



2) Em um triângulo ABC o lado AB mede $4\sqrt{2}$ e o ângulo $\hat{C}$, oposto ao lado AB, mede 45º. Determine o raio da circunferência que circunscreve o triângulo.

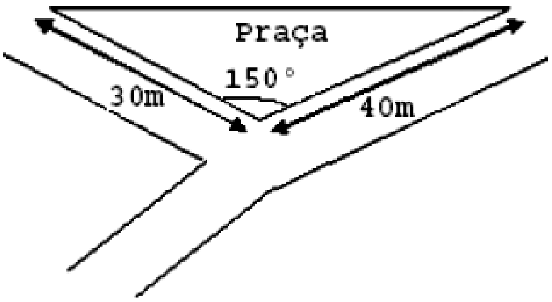
3) Dois lados de um triângulo medem 10cm e 6cm e forma entre si um ângulo de 120º. Calcule a medida do terceiro lado.

4) Num triângulo ABC $\hat{A} = 45^o$, $b = 8\sqrt{2}$ e $c = 10$. Calcule a medida do terceiro lado do triângulo.

5) Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 14cm e 10cm e formam um ângulo de 60º. Calcule as medidas de suas diagonais.

6) Num triângulo isósceles de base 6cm, o ângulo oposto à base mede 120º. Calcule a área do triângulo. (Sugestão: Usando a lei dos senos, calcule a medida de cada lado congruente.)

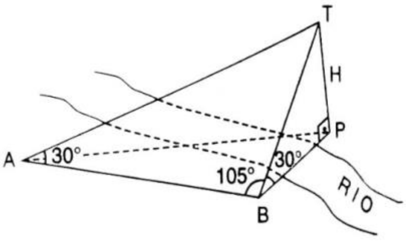
7) Preocupado com a falta de área verde em sua cidade, um prefeito resolveu aproveitar um terreno triangular, localizado no cruzamento de duas ruas, para construir uma praça, conforme representado na figura abaixo:



A área da praça a ser construída, em m², é:

A)500 B) $300\sqrt{3}$ C)300 D) $250\sqrt{3}$ E)250

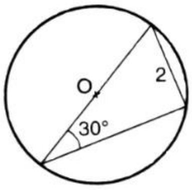
8) Uma pessoa se encontra numa planície às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo *T* de uma torre de telefone. Com o objetivo de determinar a altura *H* da torre, ela marca dois pontos *A* e *B* na planície e calcula AB = 200 m, $T\hat{A}B$ = 30º, $T\hat{B}A$ = 105ºe $T\hat{B}P$ = 30º, sendo *P* o pé da torre.



Então, *H* em metros, é igual a:

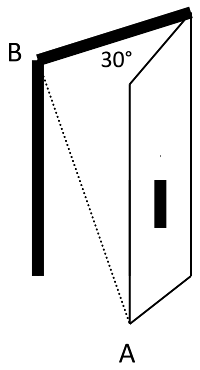
A) $\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$ B) $50\sqrt{3}$ C) 100 D) $50\sqrt{2}$ E) $100\sqrt{2}$

9) Quando o maior lado de um triângulo inscrito em um círculo coincide com o diâmetro desse círculo, o triângulo é necessariamente retângulo. Assim sendo, na figura o raio do círculo de centro *O* é igual a:



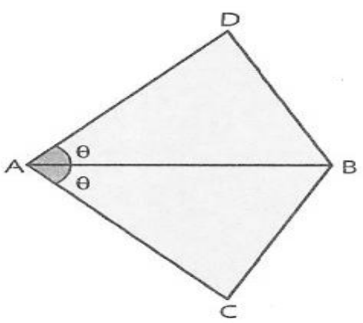
A) 4 B) 2 C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

10) Uma porta retangular de 2m de altura por 1m de largura gira 30°, conforme a figura. A distância entre os pontos A, B, em metros, é:



A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ D) $\sqrt{4+\sqrt{3}}$ E) $\sqrt{6-\sqrt{3}}$

11) (UERJ-RJ) O esquema abaixo representa a vela da asa-delta, que consiste em dois triângulos isósceles ABC e ABD congruentes, com $AC = AB = AD$. A medida de $\overline{AB}$ corresponde ao comprimento da quilha. Quando esticada em um plano, essa vela forma um ângulo $C\hat{A}D = 2\theta$.

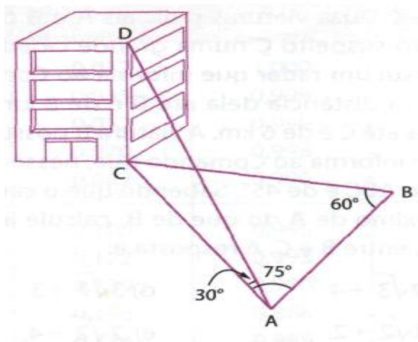


Suponha que, para planar, a relação ideal seja de $10\ \text{dm}^2$ de vela para cada $0{,}5\ \text{Kg}$ de massa total. Considere, agora, uma asa-delta de $15\ \text{Kg}$ que planará com uma pessoa de $75\ \text{Kg}$. De acordo com a relação ideal, o comprimento da quilha, em metros, é igual à raiz quadrada de:

A) $9\ \text{Cos}\theta$ B) $18\ \text{Sen}\theta$ C) $\dfrac{9}{\text{Cos}\theta}$

D) $\dfrac{18}{\text{Sen}\theta}$ E) $\dfrac{9}{\text{Sen}\theta}$

12) Um observador, situado no ponto **A**, distante 30 m do ponto **B**, vê um edifício sob um ângulo de 30°, conforme a figura a seguir.

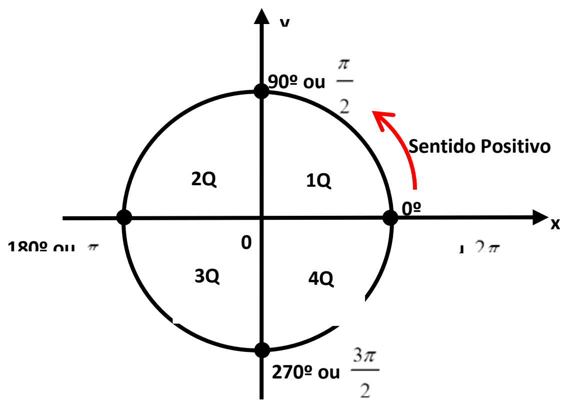


Baseado nos dados da figura, determine a altura do edifício em metros e divida o resultado por $\sqrt{2}$. (Dados: AB = 30 m; med (CÂD) = 30°; med (CÂB) = 75°; med (ABC) = 60°; med (DCA) = 90º.)

A) 10 m B) 12 m C) 15 m D) 11 m E) 14 m

ARCOS E ÂNGULOS

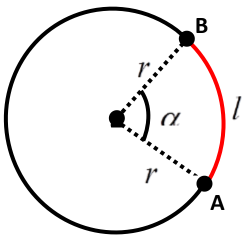
Consideramos *arco* de circunferência uma parte da circunferência determinada por dois de seus pontos. Representamos por AB o arco de extremidades A e B, tomando A como origem e considerando o sentido anti-horário.



COMPRIMENTO DE UM ARCO

Consideremos o ângulo central $A\hat{O}B$ de medida $\alpha\ rad$ e Ab o arco correspondente de comprimento l:

- α = Media do arco (ou do ângulo central correspondente) em rad.
- l = Comprimento do arco
- r = Raio da circunferência que contem o arco



Podemos calcular o comprimento de um arco por meio de uma simples regra de três.

$$2.\pi.r \rightarrow 360^{o}$$
$$l \quad \rightarrow \alpha$$

Fazendo os cálculos teremos:

$$\boxed{l = \frac{2.\pi.r.\alpha}{360^{o}}}$$

Observação: Caso seja conveniente trabalhar com o ângulo em radianos, teremos:

$$\boxed{l = \alpha.r}$$

EXERCÍCIOS

1) Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio:

a) às 8h e 5min b) às 12h e 25min
c) às 15h e 25min d) às 9h e 10min

2) Um dos problemas mais antigos de que se tem registro na história da Matemática é o da divisão da circunferência em arcos da mesma medida. O ¨grau¨ teve sua origem por volta de 5.000 a.C. Acredita-se que seu surgimento se deu pela necessidade de contagem de tempo. Analisando os números do mostrador de um relógio, colocados em pontos que dividem a circunferência em 12 partes iguais, percebe-se que cada uma das partes mede 30 graus. Desta forma, qual o menor dos ângulos formados pelos ponteiros de um relógio que está assinalando 1h e 25min.

a)80^{0} b)102^{0} c)$107,5^{0}$ d)$115,5^{0}$ e)125^{0}

3) O relógio circular de uma residência marca exatamente 5h e 42min, podemos afirmar que neste momento o menor ângulo formado pelos seus ponteiros é:

a) 81° b) 83° c) 86° d) 87°
e)90°

4) Augusto e Laura irão comemorar dois meses de namoro. Os dois decidiram ir ao shopping, coincidentemente ao mesmo horário as 12 horas da manhã. Augusto fez sua escolha e logo foi embora. Por outro lado, Laura levou 2 horas e 25 minutos para fazer a sua, mesmo assim achou que foi precipitada em sua compra. Quando os dois se encontraram para a troca de presentes, Augusto disse que havia gasto apenas 15 minutos no shopping e sua namorada envergonhada com o tempo que gastou, disse apenas que o menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio, ao final da escolha dela, foi menor do que o dele. Podemos afirmar que:

A) Laura esta mentindo.
B) Laura disse a verdade.
C) Os dois ângulos são iguais
D) O ângulo de Laura é menor que 5°
E) NDA

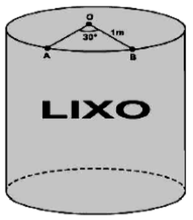
5) Na figura têm-se 5 arcos de circunferências concêntricas e igualmente espaçados entre si. Sabendo-se que a soma dos comprimentos desses arcos é igual ao comprimento da circunferência maior, assinale a alternativa que indica a medida do ângulo central comum a todas as circunferências:

A)120º B)60º C)90 D)45º E)72º

6) ***<u>O LIXO NO MEIO AMBIENTE</u>***

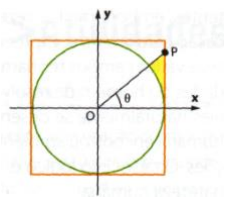
João ficou muito assustado com a diferença entre a vida que tinha na ilha do Marajó, sem barulhos absurdos, sem as sujeiras das águas, sem a incansável espera do lixeiro, enfim. Então João deixava o lixo dentro de sacos plásticos, pois cachorros, gatos, deterioravam os sacos e espalhavam os lixos. Então, João resolveu como já fazia no seu interior, comprar um latão cilíndrico. Porém, fez uma pequena abertura no seu tampão, para que fosse possível entrar o lixo e ao mesmo tempo sair sem que ficasse totalmente aberto.

Qual o comprimento AB aproximado que João usou para abrir o tampão do latão, observe a figura abaixo. (Considere π = 3,14).



A)0,523m B)1,570m C)0,659m D)1,523m E)0,452m

7) Na figura abaixo está sombreada a região compreendida entre o segmento OP, a circunferência de raio 1, centrada na origem, e o quadrado circunscrito a essa circunferência. Os lados do quadrado são paralelos aos eixos Ox e Oy. Considere que o segmento OP forma um ângulo θ com o eixo Ox. Quando $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ a área A(θ) está representada na figura a seguir.



A área A(θ) da região sombreada em função do ângulo θ é dada por:

A)$A(\theta) = \frac{tg\theta}{2} - \frac{\theta}{2}$ B)$A(\theta) = 1 - \frac{\theta}{2}$

C)$A(\theta) = \frac{tg\theta}{2} - \theta$ D)$A(\theta) = \frac{2\theta}{\pi}\left(1 - \frac{\theta}{2}\right)$

E)$A(\theta) = \theta\,(4 - \pi)$

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

I) VALORES NOTAVEIS DO SENO

Já sabemos que:

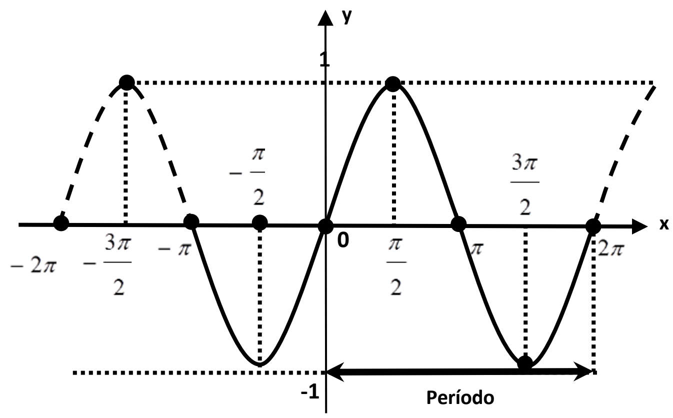
- $Sen30^o = Sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.
- $Sen45^o = Sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $Sen60^o = Sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vejamos mais alguns valores importantes do Seno:

- $Sen0^o = 0$
- $Sen90^o = Sen\frac{\pi}{2} = 1$
- $Sen180^o = Sen\pi = 0$
- $Sen270^o = Sen\frac{3\pi}{2} = -1$
- $Sen360^o = Sen2\pi = 0$

A função Seno é uma função real de variáveis reais que associa a cada número real x o valor real Senx, ou seja:

$f : R \rightarrow R$ tal que $f(x) = Senx$.



Como a função $f(x) = Senx$ é definida no conjunto dos números reais, ou seja, seu domínio é R, a curva pode ser estendida para valores menores que zero e maiores que 2π. Assim o gráfico da função $f : R \rightarrow R$, definida por $f(x) = Senx$, é a curva chamada de senóide, que tem o seguinte aspecto:

RESUMO SOBRE A FUNÇÃO SENO

- O domínio da função Seno é o conjunto dos números reais, isto é:
  $D_f = R$
- O conjunto imagem da função $f(x) = Senx$ é o intervalo $[-1,1]$.
  $\text{Im}_f = [-1,1]$

OBSERVAÇÃO: $-1 \leq Senx \leq 1$

- A função Seno é uma função ímpar, isto é, $Sen(-x) = -Senx, \forall x \in R.$

Exemplo: $Sen\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ e $Sen\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}.$

- A função $f(x) = Senx$ é periódica de período P $= 2\pi$. De modo geral, para funções do tipo $f(x) = Sen(kx)$, o período é obtido dividindo-se 2π por $|k|$:

Período= $\dfrac{2\pi}{|k|}$.

- Quanto ao sinal da função Seno, vemos que a função é positiva para valores do 1º e 2º quadrantes e negativa para valores do 3º e 4º quadrantes.

EXERCÍCIOS

1) Determine os valores reais de ***m*** para os quais as seguintes equações tenham soluções:

a) $Senx = 2m - 3$ b) $Senx = 2m - 7$

c) $Senx = m - 5$ d) $2Senx = 3m + 4$

2) Construa o gráfico das funções a seguir, em um período, dando o domínio, a imagem e o período:

A) $y = 4Senx$ B) $y = 1 + Senx$

C) $y = Sen\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ D) $y = 2Sen\left(\dfrac{x}{4}\right)$

4) Determine os valores máximo, mínimo e o período de $f(x)$.

a) $f(x) = 2 + Sen\left(x + \dfrac{1}{3}\right)$

b) $f(x) = -1 + Sen\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

c) $f(x) = -Sen\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

d) $f(x) = -3 - Sen8x$

VALORES NOTAVEIS DO COSSENO

Já sabemos que:

- $Cos30^o = Cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$
- $Cos45^o = Cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$
- $Cos60^o = Cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}.$

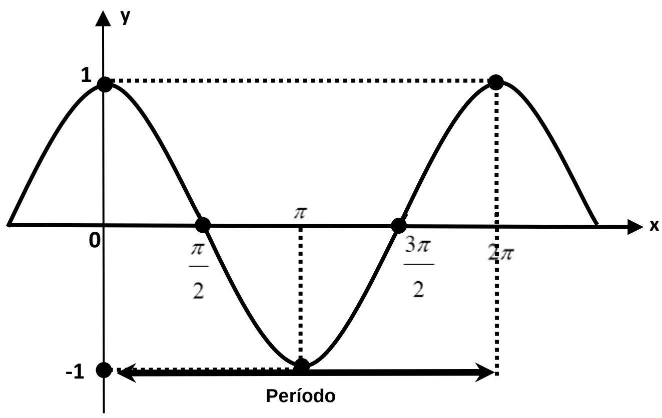
Vejamos mais alguns valores importantes do Seno:

- $Cos0^o = 1$
- $Cos90^o = Cos\dfrac{\pi}{2} = 0$
- $Cos180^o = Cos\pi = -1$
- $Cos270^o = Cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$
- $Cos360^o = Cos2\pi = 1$

FUNÇAÕ COSSENO

A função Cosseno é uma função real de variáveis reais que associa a cada número real x o valor real Cosx, ou seja:

$f: R \rightarrow R$ tal que $f(x) = Cosx.$.



Como a função $f(x) = Cosx$ é definida no conjunto dos números reais, ou seja, seu domínio é R, a curva pode ser estendida para valores menores que zero e maiores que 2π. Assim o gráfico da função $f: R \rightarrow R$, definida por $f(x) = Cosx$, é a curva chamada de Cossenóide, que tem o seguinte aspecto:

RESUMO SOBRE A FUNÇÃO COSSENO

- O domínio da função Cosseno é o conjunto dos números reais, isto é:

$D_f = R$

- O conjunto imagem da função $f(x) = Cosx$ é o intervalo $[-1,1]$.
  $\text{Im}_f = [-1,1]$, isto é,
  OBSERVAÇÃO: $-1 \leq Cosx \leq 1$

- A função Cosseno é uma função par, isto é, $Cos(-x) = Cosx, \forall x \in R.$
  Exemplo: $Cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $Sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

- A função $f(x) = Cosx$ é periódica de período P $= 2\pi$. De modo geral, para funções do tipo $f(x) = Cos(kx)$, o período é obtido dividindo-se 2π por $|k|$:
  Período$= \frac{2\pi}{|k|}$.

EXERCÍCIOS

1) Determine os valores reais de ***K*** para os quais as seguintes equações tenham soluções:
a) $Cosx = 2k + 5$ b) $3Cosx = 6k - 15$
c) $Cosx = 3k + 4$ d) $2Cosx = 3k + 6$

2) Construa o gráfico das funções a seguir, em um período, dando o domínio, a imagem e o período:
A) $y = 2Cosx$ B) $y = -Cosx$
C) $y = 2 + Cosx$ D) $y = 3Cos\left(\frac{x}{2}\right)$

"FENÔMENOS PERIÓDICOS"
A natureza está repleta de fenômenos físicos ditos periódicos, ou seja, que se repetem sem alteração cada vez que transcorre um intervalo de tempo determinado (período). Por exemplo, os movimentos das marés, da radiação eletro magnética, da luz visível, dos pêndulos, das molas, são todos periódicos. As funções trigonométricas, em especial as senóides e as cossenóides, são excelentes para descrever tais fenômenos, uma vez que são funções periódicas.

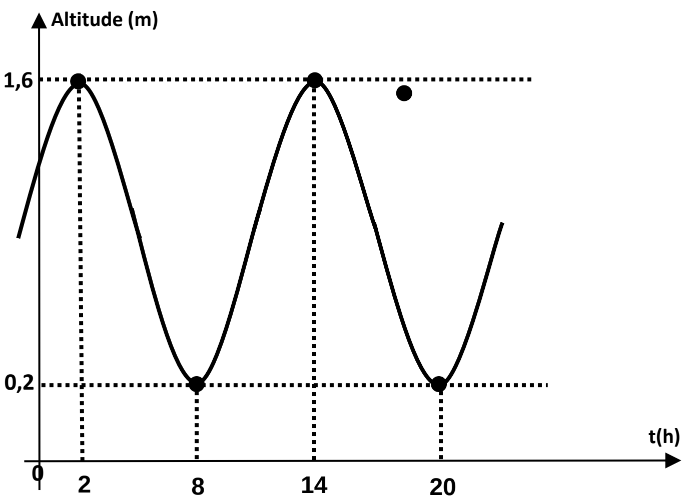
Dessa forma podemos associar a qualquer movimento periódico uma função seno do tipo $f(x) = a + bSen(kx + d)$ ou uma função cosseno do tipo $f(x) = a + bCos(kx + d)$, cuja imagem é dada por
$[a - |b|, a + |b|]$, e cujo período é dado por $\frac{2\pi}{|k|}$.

Na descrição dos fenômenos periódicos, em geral se opta por valores de b e k positivos, de forma que a imagem da senóide e da cossenóide nesses casos passem a ser $[a - b, a + b]$ e o período $\frac{2\pi}{k}$.

Alem disso, é conveniente saber mais outros três detalhes sobre as funções seno e cosseno.

- Se b < 0, o gráfico fica simétrico ao gráfico da função em que b>0 (simetria em relação ao eixo x).
- Se d$\neq$ 0, o gráfico translada $\frac{-d}{k}$ unidades.

VEJAMOS UMA APLICAÇÃO!!!
Vamos descrever com uma senóide a altitude do mar em um dia em determinado local sabendo que nesse dia, na maré alta, a altitude do mar foi 1,6m a na maré baixa foi 0,2m. As mares altas ocorreram às 2h e às 14 h e as mares baixas ocorreram às 8h e às 20h. Vamos considerar a contagem do tempo em horas a partir da meia-noite.
O texto pode ser resumido pelo gráfico abaixo:

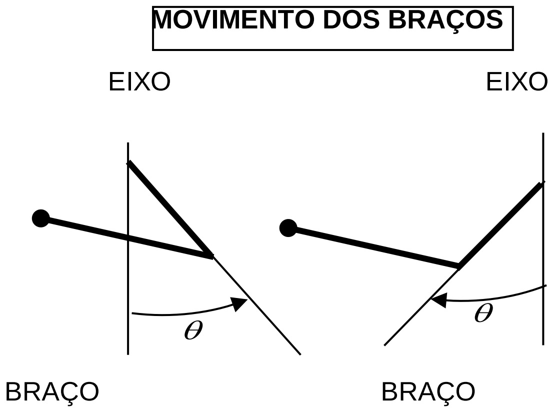


Assim, nesse dia e nesse local, a altitude do mar pode ser descrita pela função

$$h(t) = 0{,}9 + 0{,}7Sen\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right).$$

EXERCÍCIOS:

1) Os praticantes de Cooper balançam os braços ritmicamente, enquanto correm para frente e para trás. Descrevendo uma oscilação completa em $\frac{3}{4}$ de segundo, conforme a figura abaixo.



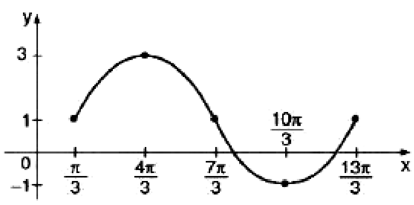
O ângulo θ varia em função do tempo t, em segundos, aproximadamente, de acordo com a equação:

$$\theta = \frac{\pi}{9} sen\left[\frac{8\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)\right]$$

Tomando por base os dados acima, podemos afirmar que o maior ângulo assumido pelo ângulo θ é:

A) 15° B) 20° C) 25° D) 30° E) 45°

2) A figura a seguir mostra parte de uma onda senoidal que foi isolada para uma pesquisa:



Qual das alternativas melhor representa a equação da onda para o período apresentado?

A) $y = 1 + 2Sen\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

B) $y = 1 + 2Sen\left(\frac{x}{2}\right)$

C) $y = 1 + 2Sen\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

D) $y = 1 + 2Sen\left(\frac{x}{3}\right)$

E) $y = 1 + 2Sen\left(\frac{x}{6}\right)$

3)*<u>Responda as questões (3.1) e (3.2) com base no texto abaixo:</u>*

No hemocentro de um certo hospital, o número de doações de sangue tem variado periodicamente. Admita que, neste hospital, no ano de 2007, este número, de janeiro (t = 0) a dezembro (t = 11), seja dado aproximadamente, pela expressão

$$S(t) = \lambda - Cos\left[\frac{(t-1)\pi}{6}\right]$$

com λ uma constante positiva, $S(t)$ em milhares e t em meses, $0 \le t \le 11$.

3.1) Qual o valor da constante λ, sabendo que no mês de fevereiro houve 2 mil doações de sangue?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 10

3.2) Em quais meses houve 3 mil doações de sangue?

A) janeiro e abril B) fevereiro e junho

C) maio e novembro D) maio e dezembro

E) julho e dezembro

4) A expressão $f(t) = 2 - 2Cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$, $0 \le t \le 12$, representa a variação da profundidade do trabalho de uma ferramenta de corte em relação ao tempo de operação. Em que instante essa profundidade é máxima?

A) t=9 B) t=12 C) t=6 D) t=3 E) t=2

5) Na estação de trabalho de pintura de peças de uma fábrica, a pressão em um tambor de ar comprimido varia com o tempo conforme a expressão $P(t) = 50 + 50Sen\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$, t > 0.

Assinale a alternativa em que o instante t corresponde ao valor mínimo da pressão.

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{3\pi}{2}$ c) 3π d) π e) 2π

6) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica $f(x) = -800.Sen\left(\frac{x.\pi}{12}\right) + 900$, em que $f(x)$ é o número de clientes e x a hora da observação (x é um número inteiro tal que $0 \le x \le 24$). Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é igual a:

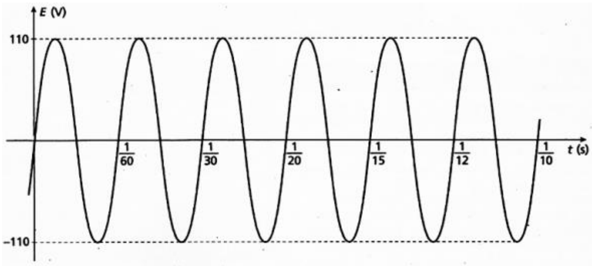
A) 600 B) 800 C) 900 D) 1500 E) 1600

7) Em alguns trechos do rio Tietê (SP), verifica-se a formação de notáveis quantidades de espuma, resultante de poluição por resíduos industriais. Em certo dia, a quantidade de espuma variou segundo a função $f(t) = 3 + 2.Sen\left(\frac{\pi.t}{6}\right)$, sendo $f(t)$ a quantidade de espuma, em m^3 por metro de rio, e t o tempo, em horas contadas a partir da meia-noite. Nessas condições, qual o 1º momento do dia, em horas, em que a quantidade de espuma atingiu $5m^3$ por metro de rio?

A)às 2h B)às 2,5h C)às 3h D)às 3,5h E)4h

8) A tensão elétrica produzida em um circuito de corrente alternada é um exemplo de fenômeno periódico que pode ser modelado por uma função trigonométrica.

Considere que a função $E(t) = b.Sen(k.t)$, (com t em segundos), representa uma tenção elétrica que oscila entre um valor mínimo e um valor máximo, com frequência de 60 ciclos por segundo,(ver gráfico abaixo).

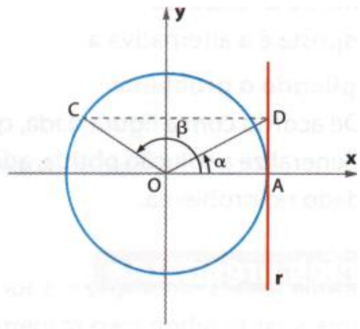


De acordo coam as informações obtidas acima, podemos concluir que os valores das constantes b e k, são respectivamente:

A) 110 e 60π B)110 e 30π C) 110 e 120π

D) -110 e 120π E) -110 e 60π

9) Na figura a seguir, a e p são as medidas dos ângulos AOD e AOC, respectivamente, e r é a reta tangente à circunferência de centro O e raio unitário, no ponto A.



Se CD é paralelo a AO e 0<α<$\frac{\pi}{4}$, então senβ é igual a:

A)$sen\alpha$ B)$tb\beta$ C) $\cos\beta$ D) $cos\alpha$ E) $tg\alpha$

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos chamados jogos de azar que levou ao desenvolvimento da Análise Combinatória, parte da Matemática que estuda os métodos de contagem.

A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar - de uma forma indireta - o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

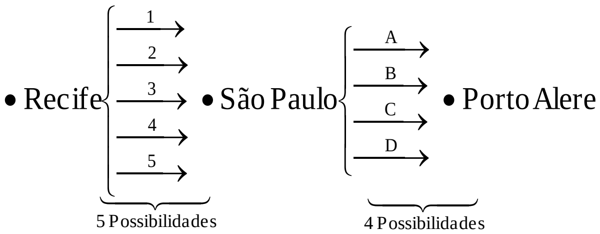
PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (PFC)

Se determinado acontecimento ocorre em n etapas diferentes, e se a primeira etapa pode ocorrer de k_1 maneiras diferentes, a segunda de k_2 maneiras diferentes, e assim sucessivamente, então o número total T de maneiras de ocorrer o acontecimento é dado por:

$$\boxed{T = k_1 . K_2 . k_3 . \ldots . k_n}$$

EXEMPLO1:

Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a porto Alegre Partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?



Total de Possibilidades: 5.4 = 20

OBSERVAÇÃO:

Quando, num problema de contagem, aparecer o conectivo *"E"*, devemos pensar em dependência, em simultaneidade, na operação multiplicação.

Quando aparecer o conectivo *"OU"* num problema de contagem, devemos interpretá-lo no sentido aditivo, usando a operação adição.

EXERCICIOS:

1) O grêmio estudantil de uma escola realiza eleições para preenchimento das vagas de sua diretoria. Para presidente apresentam-se cinco candidatos; para vice-presidente, oito candidatos, e para secretário, seis candidatos. Quantas chapas podem ser formadas?

2) Sabe-se que um salão tem cinco portas, determine o número de maneiras distintas de entrar e sair dele sem usar a mesma porta.

3) Existem 2 vias de locomoção de uma cidade *A* para uma cidade *B* e 3 vias de locomoção da cidade *B* a uma cidade *C*. De quantas maneiras pode-se ir de *A* até *C*, passando por B?

4) De quantas maneiras diferentes pode-se vestir uma pessoa que tenha 5 camisas, 3 calças, 2 pares de meias e 2 pares de sapatos?

FATORIAL

É comum, nos problemas de contagem, calcular o produto de uma multiplicação cujos fatores são números naturais consecutivo. Para facilitar esse trabalho, vamos adotar um símbolo chamado *fatorial*.

Sendo *n* um número inteiro maior que 1, define-se fatorial de *n* como o produto dos *n* números naturais consecutivos de *n* a 1. Indica-se n!

n! (Lê-se: n fatorial ou fatorial de n.)

$\boxed{n! = n.(n-1).(n-2)\ldots 3.2.1}$, sendo

$n \in IN$ e $n > 1$

De acordo com a definição, temos:

2! = 2.1 = 2 3! = 3.2.1 = 6

4! = 4.3.2.1 = 24   5! = 5.4.3.2.1 = 120 etc.

OBSERVAÇÃO:

I) Podemos escrever para qualquer $n(n \in IN)$ e $n > 2$ que:

$$8! = 8.(7.6.5.4.3.2.1) = 8.7!$$

$$5! = 5.4.(3.2.1) = 5.4.3!$$

$$13! = 13.12.11! = 13.12.11.10! = 13.12.11.10.9!$$

Em geral:

$$n! = n.(n-1)!$$

$$n! = n.(n-1).(n-2)!$$

Ou ainda

$$(n+1)! = (n+1).n!$$

$$(n-1)! = (n-1).(n-2).(n-3)!$$

II) Por definição, para n = 0, temos 0! = 1 e, para n = 1, temos 1! = 1.

EXERCICIOS

1) Calcule o valor de:

a) $\dfrac{7!}{5!}$ b) $\dfrac{4!.7!}{9!.3!}$ c) $\dfrac{8!.5!}{6!.9!}$

d) $(3+2.4-5)!$ e) $\dfrac{10!.7!}{2.5!.12!}$

2) Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{(n-3)!}{(n-5)!}$ b) $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$ c) $\dfrac{(n+3)!.(n-2)!}{n!.(n-1)!}$

3) Resolva as seguintes equações:

a) $\dfrac{8(x+3)!}{(x+4)!} = 2$ b) $\dfrac{x!}{(x-2)!} + \dfrac{(x+1)!}{x!} = 10$

c) $\dfrac{(x+2)!}{2(x-6)!} = \dfrac{(x+1)!}{(x-7)!}$ d) $\dfrac{(x+1)! + x!}{(x-1)!} = 6x$

e) $(n-2)! = 2.(n-4)!$

4) Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para tirar a foto?

A) 24   B) 48   C) 96   D) 120   E) 720

5) Para n natural, n≥2, quanto vale a expressão abaixo?

$$n^2.(n-2)!.(1-\frac{1}{n})$$

A) n!   B) (n − 1)!   C) (n + 1)!   D) n.(n + 1)!   E) (n − 2)!

6) A solução da equação abaixo é um número natural:

$$\frac{3!(x-1)!}{4(x-3)!} = \frac{182(x-2)! - x!}{2(x-2)!}$$

A) Maior que nove.   B) Ímpar.

C) Cubo perfeito.   D) Divisível por cinco.

E) Múltiplo de três.

7) Analise as sentenças abaixo.

I. 4! + 3! = 7!

II. 4! × 3! = 12!

III. 5! + 5! = 2× 5!

É correto o que se apresenta em:

A) I apenas

B) II apenas

C) III apenas

D) I, II e III.

8) Todo número natural pode ser escrito de forma única utilizando-se uma base fatorial, como, por exemplo, 17 = 2 · 3! + 2 · 2! + + 1 · 1! = $(2,2,1)_{fat}$.

Genericamente, podemos representar N = $a_n \cdot n! + a_{n-1} \cdot (n-1)! + a_{n-2} \cdot (n-2)! + + ...+ a_1 \cdot 1! = (a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1)_{fat}$, em que ai ∈ {0, 1, 2, ..., i}.

Dessa forma, o número $(3,1,0,1)_{fat}$ equivale, na base 10, ao número:

A) 83 B) 51 C) 79 D) 65 E) 47

9**)**A seguir, temos o fatorial de alguns números.

1! =1

2!=2x1

3!=3x2x1

4!=4x3x2x1.

Considere o astronômico resultado de 2013! quanto vale a soma dos seus três últimos algarismos?

A) 0 B) 6 C) 13 D) 20 E) 21

10**)** Em uma das partidas realizadas pelo PARAZÃO (Campeonato Paraense de Futebol de Campo) de 2018, o Clube do Remo jogou com o Paysandu e nessa partida o número de gols marcados pelo time do Remo está representado pela solução da equação:

$$n! + (n-1)! = 4.(n-1)!$$

e o número de gols do time do Paysandu pela solução da equação:

$$4n! = \frac{(n+2)! + (n+1)!}{n+1}.$$

Considerando que nessa partida não houve gols contra, podemos concluir que:

A) O time do Remo marcou 4 gols e o time do Paysandu marcou 2 gols;

B) O time do Remo marcou 2 gols e o time do Paysandu marcou 4 gols;

C) O time do Remo marcou 1 gol e o time do Paysandu marcou 1 gol;

D) O time do Remo marcou 2 gols e o time do Paysandu marcou 3 gols;

E) O time do Remo marcou 3 gols e o time do Paysandu marcou 1 gol.

11) O produto n (n - 1) pode ser escrito, em termos de fatoriais, como:

a) $n! - (n-2)!$ b) $\frac{n!}{(n-2)!}$ c) $n! - (n-1)!$

d) $\frac{n!}{[2(n-1)!]}$ e) $\frac{(2n)!}{[n!(n-1)!]}$

PERMUTAÇÃO SIMPLES

Permutações simples de n elementos distintos são os agrupamentos formados com todos os n elementos e que diferem uns dos outros pela ordem de seus elementos.

"De uma forma resumida, permutar significa trocar de posição".

EXEMPLO:

Com as letras da palavra *RODA,* podemos criar um total de 24 *ANAGRAMAS*.

Observe:

RODA	ODAR	DARO	ADOR
ROAD	ODRA	DAOR	ADRO
RADO	ORAD	DORA	ARDO
RAOD	ORDA	DOAR	AROD
RDAO	OADR	DRAO	AORD
RDAO	OARD	DROA	AODR

OBSERVAÇÃO: Permutações de letras recebem o nome de *ANAGRAMAS*.

O número total de permutações simples de n elementos distintos é dado por $n!$, isto é:

$$\boxed{P_n = n!}$$

EXEMPLO1: Quantos números de 5 algarismos distintos podem ser formados, usando-se os algarismos 1, 3, 5, 7 e 8?

SOLUÇÃO: Queremos formar números (agrupamentos) de 5 algarismos com os 5 dados, ou seja, permutações dos 5 números. Assim, o total de permutações dos 5 números será dado por:

$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$ (Podem ser formados 120 número).

PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS

Se entre os n elementos de um conjunto, existem a elementos repetidos, b elementos repetidos, c elementos repetidos e assim sucessivamente, o número total de permutações que podemos formar é dado por:

$$\boxed{P_n^{a!b!c!...!} = \frac{n!}{a!.b!.c!...!}}$$

EXEMPLOS:

1) Quantos anagramas têm a palavra *NATÁLIA*?

SOLUÇÃO:A palavra *NATÁLIA* tem 7 letras, sendo que 3 são iguais a A, portanto,

$$P_7^3 = \frac{7!}{3!} = \frac{7.6.5.4.3!}{3!} = 840 \text{ Anagramas.}$$

EXERCICIOS

1) Quantos são os anagramas da palavra:

a) *PERDÃO;*

b) *PERDÃO* que iniciam com P e terminam por O;

c) *PERDÃO* em que as letras A e O aparecem juntas e nessa ordem;

d) *PERDÃO* em que P e O aparecem nos extremos.

2) De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode sentar-se num banco de 5 lugares para tirar uma foto?

3) De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode sentar-se num bando de 5 lugares, ficando duas delas (por exemplo pai e mãe) sempre juntas, em qualquer ordem?

4) Quantos anagramas da palavra *BIGODE* têm as consoantes e as vogais dispostas alternadamente?

5) Em uma estante estão dispostos 8 livros distintos, sendo 3 de matemática, 2 de física e 3 de química. Determine de quantas formas distintas podemos dispor os livros, de tal maneira que fiquem sempre juntos:

a) Os de matemática;

b) Os de uma mesma matéria.

6) embalagens dos produtos vendidos por uma empresa apresentam uma seqüência formada por barras verticais: quatro de largura 1,5mm; três de largura 0,5mm e duas de largura 0,25mm, como no exemplo abaixo.

Cada seqüência indica o preço de um produto. Quantos pecos diferentes podem ser indicados por essas nove barras?

a)80 b)859 c)968 d)1260 e) 2120

7) Se uma pessoa gasta exatamente 1 hora para escrever cada grupo de 672 anagramas da palavra Paraguai, quanto tempo levará para escrever todos, se houver um intervalo de 30 minutos entre um grupo e outro, para descansar?

a)13he30min b)14h c)14he30min

d) 15h e)15he30min

COMBINAÇÕES

Observe com atenção este exemplo.

Ane, Elisa, Rosana, Felipe e Gustavo formam uma equipe. Dois deles precisam representar a equipe em uma apresentação. Quais e quantas são as possibilidades?

Representemos por A: Ane; E: Elisa; R: Rosana; F: Felipe e G: Gustavo. Precisamos determinar todos os subconjuntos de 2 elementos do conjunto de 5 elementos $\{A, E, R, F, G\}$. A ordem em que os elementos aparecem nesses subconjuntos não importa, pois Ane e Elisa, por exemplo, é a mesma dupla de Elisa e Ane. Então, os subconjuntos de 2 elementos são: $\{A, E\}, \{A, R\}, \{A, F\}, \{A, G\}, \{E, R\}, \{E, F\}, \{E, G\}, \{R, F\}$

$\{R, G\}, \{F, G\}$.

A esses subconjuntos chamamos de combinações

simples de de 5 elementos tomados com 2 elementos, ou tomados 2 a 2, e escrevemos $C_{5,2}$.

Como o numero total dessas combinações é 10, escrevemos $C_{5,2} = 10$.

DEFINIÇÃO:

Denominamos combinações simples de n elementos distintos tomados p a p aos subconjuntos formados por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados. É importante observar que duas combinações são diferentes quando possuem elementos distintos, *não importando a ordem em que os elementos são colocados*. Representando por $C_{n,p}$ o número total de combinações de n elementos tomados p a p, temos a seguinte fórmula:

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}, \text{com } n \geq p.}$$

OBSERVAÇÃO: Podemos representar uma combinação de n elementos tomados p a p por;

$$C_{n,p} = C_n^p = \binom{n}{p}$$

EXEMPLO1:Uma prova consta de 6 questões das quais o aluno deve resolver 3. De quantas formas ele poderá escolher as 3 questões ?

SOLUÇÃO:

Quer-se agrupar 3 elementos, dentre os 6 existentes.

Perceba que a ordem em que os elementos aparecerão não será importante, uma vez que, ao resolver a 1ª , a 2ª e a 3ªquestão é o mesmo que resolver a 2ª , a 3º e a 1ª, portanto é um problema de combinação.

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!.(6-3)!} = \frac{6.5.4.3!}{3!.3.2.1} = 20.$$

Logo, um aluno pode escolher suas 3 questões de 20 maneiras diferentes.

UMA PROPRIEDADE IMPORTANTE DAS COMBINAÇÕES

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}$$

Ou suja:

$$C_{3,2} = C_{3,1} = 3$$

$$C_{5,3} = C_{5,2} = 10$$

$$C_{43,42} = C_{43,1} = 43$$

Essa propriedade é muito útil para simplificar os cálculos e é conhecida por igualdade de combinações complementares.

EXERCICIOS

1) Quantas comissões com 4 elementos podemos formar numa classe de 20 alunos?

2) Calcule o numero de comissões compostas de 3 alunos que podemos formar a partir de um grupo de 5 alunos.

3) Calcule o numero de comissões com 2 professores e 3 alunos que podem ser formadas a partir de um grupo de 5 professores e 8 alunos.

4) Dados 7 pontos distintos, 4 sobre uma reta e 3 sobre uma paralela á primeira, calcule o numero de triângulos com vértices nesses pontos.

5) Em uma classe de 20 alunos, o professor deseja organizar grupos de 5 para trabalhar no laboratório. Quantos grupos distintos poderá formar?

6) O conselho desportivo de uma escola é formado por 2 professores e 3 alunos. Candidataram-se 5 professores e 30 alunos. De quantas maneiras diferentes esse conselho pode ser eleito?

7) em uma seleção de futebol, existem 8 jogadores de ataque, 6 de meio-campo, 6 defensores e 3 goleiros.

Quantos times diferentes podem ser formados utilizando-se 1 goleiro, 4 defensores, 3 meio-campistas e 3 atacantes?

8) Suponha que no Brasil existam n jogadores de vôlei de praia. O numero de duplas que podemos formar com esses jogadores é:

a) $\frac{n}{2}$ b) $\frac{n^2+2n}{2}$ c) $\frac{n^2-2n}{4}$

d) $\frac{n^2+n}{2}$ e) $\frac{n^2-n}{2}$

9) Num campeonato de xadrez há 20 inscritos. Quantas partidas podem ser efetuadas entre os inscritos?

ARRANJO

Dado um conjunto com n elementos, chama-se arranjo simples de p elementos, a todo agrupamento de p elementos distintos dispostos numa certa ordem. Dois arranjos diferem entre si, pela ordem de colocação dos elementos.

Representando o número total de arranjos de n elementos tomados p a p por $A_{n,p}$, teremos a seguinte fórmula:

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{com } n \geq p.}$$

EXEMPLO1:Com as letras a, b e c, quantos pares ordenados com elementos distintos podemos formar?

SOLUÇÃO: Considerando dois pares quaisquer $(a,b) \neq (b,a)$, vemos que a ordem dos elementos altera o par ordenado.

Trata-se, então, de um problema de arranjo simples:

$$A_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3.2 = 6.$$

Logo, podemos formar 6 pares ordenados.

EXERCICIOS

1) Quantos números de 4 algarismos distintos podemos formar com os algarismos de 1 a 9?

2) Um clube tem 30 membros. A diretoria é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras pode-se formar uma diretoria?

3) De quantas maneiras podemos escolher um pivô e um ala num grupo de 12 jogadores de basquete?

4) Durante o mês de junho, ocorre a tradicional competição de quadrilhas dos bairros. De quantas maneiras podem ocorrer a escolha da campeã e vice-campeã entre 5 quadrilhas finalistas, sabendo-se que não ocorrem empates?

5) Dona Priscila tem três filhos e ganhou ingressos para três brinquedos diferentes de um parque de diversões. De quantos modos ela poderá distribuir os ingressos premiando três filhos seus?

6) Durante um campeonato mundial de futebol, disputado por 24 países, as tampinhas de coca-cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º lugar, Brasil/ 2º lugar, Nigéria/ 3º lugar, Holanda) se em cada tampinha os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

7) (CESUPA 2002) Desde 30/06/2001, os números dos telefones de varias cidades do

interior do Pará passaram a ter 8 (oito) dígitos, sendo que todos iniciam por 37. Com esta mudança, o número possível de telefones, com dígitos distintos, que podem ser disponibilizados para estas cidades, é igual a:

8) Luciano realizou uma pesquisa para verificar a opinião dos paraenses a respeito de quem seriam os três primeiros colocados na corrida do Círio de 2003, na seguinte ordem: Vencedor , 2º colocado e 3º colocado. No momento da pesquisa, Luciano apresentava, para escolha dos entrevistados, uma lista contendo o nome dos dez favoritos dentre os atletas participantes. Desconsiderando qualquer possibilidade de empate, o número de formas diferentes de respostas é:

a) 120 b) 240 c) 360 d) 540 e) 720

EXERCICIOS COMPLEMENTARES:

1) Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com 2*n* competidores, então na 2ª fase restarão *n* competidores, e assim sucessivamente até a partida final.
Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas.
Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por

A) 2 X 128

B) 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2

C) 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1

D) 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2

E) 64 + 32 + 16 + 8+ 4 + 2+ 1

2) O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em design e tecnologia.
Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 4 fev. 2015 (adaptado).

Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete. Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante.

Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é

A) A_{10}^{4} B) C_{10}^{4} C) $C_4^2.C_6^2.2.2$

D) $A_4^2.A_6^2.2.2$ E) $C_4^2.C_6^2$

3) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que “L” e “D” representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adequa às da empresa é

A) I. B) II. C) III. D) IV. E) V.

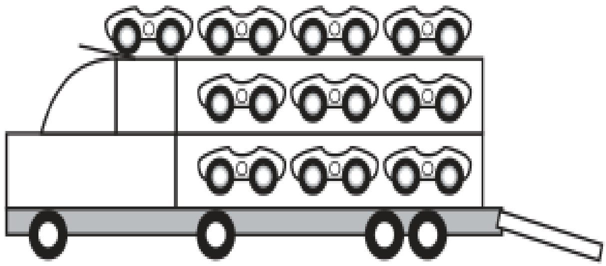
4) Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando videogame. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

A) 64 B) 56 C) 49 D) 36 E) 28

5) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores: **amarelo, branco, laranja e verde**, e cada carrinho é **pintado apenas com uma cor**. O caminhão-cegonha **deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis**. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha **não gera um novo modelo do brinquedo**. Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo que essa empresa poderá produzir?

A) $C_{6,4}$ B) $C_{9,3}$ C) $C_{10,4}$ D) 6^4 E) 4^6

6) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro.

Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

A) $\frac{10!}{2!.8!}-\frac{4!}{2!.2!}$ B) $\frac{10!}{8!}-\frac{4!}{2!}$ C) $\frac{10!}{2!.8!}-2$

D) $\frac{6!}{4!}+4.4$ E) $\frac{6!}{4!}+6.4$

7) Para cadastrar-se em um *site*, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

***Disponível em: www.infowester.com.* Acesso em: 14 dez. 2012.**

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse *site* é dado por

A) $10^2.26^2$ B) $10^2.52^2$ C) $10^2.52^2.\frac{4!}{2!}$

D) $10^2.26^2.\frac{4!}{2!.2!}$ E) $10^2.52^2.\frac{4!}{2!.2!}$

8) A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da mega sena não é zero, mas é quase.

Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto {01, 02, 03, ..., 59, 60}, custava R$ 1,50.

Disponível em: www.caixa.gov.br. Acesso em: 7 jul. 2009.

Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R$ 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da mega sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente,

a) $1\frac{1}{2}$ vez menor b) $2\frac{1}{2}$ vez menor c) 4 vezes menor

d) 9 vezes menor e) 14 vezes menor

9) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo. O coeficiente de melhora da alteração recomendada é

A) $\frac{62^6}{10^6}$ B) $\frac{62!}{10!}$ C) $\frac{62!.4!}{10!.56!}$

D) $62!-10!$ E) 62^6-10^6

10) A reforma agrária ainda é um ponto crucial para se estabelecer uma melhor distribuição de renda no Brasil. Uma comunidade de sem terra, após se alojar numa fazenda comprovadamente improdutiva, recebe informação de que o INCRA irá receber uma comissão para negociações. Em assembléia democrática, os sem terra decidem que tal comissão será composta por um presidente geral, um porta-vóz que passará as notícias à comunidade e aos representantes e um agente que cuidará burocrática das negociações. Além desses com cargos específicos, participarão dessa comissão mais seis conselheiros que auxiliarão indistintamente em todas as fases da negociação.

Se, dentre toda a comunidade, apenas 15 pessoas forem consideradas aptas aos cargos, o número de comissões distintas que poderão ser formadas com essas 15 pessoas é obtido pelo produto:

A) $13.11.7.5^2.3^2.2^4$ B) $13.11.7.5.3.2$

C) $13.11.7^2.5^2.3^3.2^6$ D) $13.7^2.5^2.3^3.2^6$

E) $13.11.7^2.5.3^2.2^3$

PROBABILIDADES

O termo probabilidade tem uso muito amplo na conversa cotidiana entre as pessoas no sentido de sugerir um grau de incerteza sobre o ocorrido no passado, o que ocorrerá no presente e no futuro. O torcedor de um time de futebol pode apostar na probabilidade de seu time ganhar no próximo jogo. Embora seu time seja favorito em ganhar, pode ser que ele venha a perder ou a empatar. O aluno poderá ficar contente em realizar as próximas provas porque ele acredita que sua probabilidade de obter boas notas seja grande.

A idéia de probabilidade tem um papel muito importante quanto à situação que envolve a tomada de decisões. O publicitário precisa lançar uma propaganda sobre um determinado produto no mercado, logo ele precisará de informações sobre a probabilidade de sucesso que esta propaganda alcançará.

DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

A Teoria da Probabilidade tenta dar significado a experimentos tais que o resultado não pode ser completamente pré-determinado, ou seja, visa definir um modelo matemático que seja adequado à descrição e interpretação de fenômenos aleatórios.

EXPERIMENTO ALEATÓRIO

São fenômenos que, mesmo repetidos várias vezes sob condições semelhantes, apresentam resultados imprevisíveis. O resultado final depende do acaso.

EXEMPLOS:

Lançar um dado e observar a face virada para cima.

Retirar e observar uma carta de um baralho.

Sortear uma bolinha no bingo e verificar o número.

ESPAÇO AMOSTRAL

É um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

EXEMPLOS:

No experimento aleatório "lançamento de uma moeda" temos o espaço amostral {cara, coroa}.

No experimento aleatório "lançamento de um dado" temos o espaço amostral {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

EVENTO

É qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

EXEMPLO 1:

Experimento Aleatório: "lançamento de uma moeda" e registro do resultado.

Espaço Amostral: U = $\{Ca; Co\}$

Alguns Eventos:

$$\begin{cases} \text{Evento A : Ocerrência de Cara} \Rightarrow \text{A} = \{Ca\} \\ \text{Evento B : Ocerrência de Coroa} \Rightarrow \text{B} = \{\text{Co}\} \end{cases}$$

EVENTO CERTO, ELEMENTAR E IMPOSSIVEL

EVENTO CERTO: É quando o evento coincide com o espaço amostral.

Espaço Amostral: $U = \{1,2,3,4,5,6\}$

Evento A:"Ocorrência de um número menor que 7"

$\text{A} = \{1,2,3,4,5,\ 6\}$, portanto $\text{A} = \text{U}$, logo A é um evento certo.

EVENTO ELEMENTAR: É um subconjunto unitário do espaço amostral.

Espaço Amostral: $U = \{1,2,3,4,5,6\}$

Evento B: "Ocorrência de um número múltiplo de 4"

$\text{B} = \{4\}$, portanto B é um evento elementar.

EVENTO IMPOSSÍVEL: É o subconjunto vazio do espaço amostral.

Espaço Amostral: $U = \{1,2,3,4,5,6\}$

Evento C: "Ocorrência de número maior que 6"

$\text{C} = \phi$, portanto C é um evento impossível.

CONCEITO DE PROBABILIDADE

Se em um fenômeno aleatório as possibilidades são igualmente prováveis, então a probabilidade de ocorrer um evento A é:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

REGRAS PARA O CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

1) A probabilidade de um evento A, denotada por P(A), é um número de 0 a 1 que indica chance de ocorrência do evento A. Quanto mais próxima de 1 é P(A), maior é a chance de ocorrência do evento A, e quanto mais próxima de zero, menor é a chance de ocorrência do evento A.

$$0 \le P(A) \le 1$$

2) A probabilidade de um evento *certo* S, denotado por $P(S)$, é igual a 1 ou 100%.

$$P(S) = 1$$

3) A probabilidade de o evento *impossível* ocorrer, denotada por $P(\phi)$, é igual a 0 (zero).

$$P(\phi) = 0$$

4) REGRA DA SOMA PARA EVENTOS

MUTUAMENTE EXCLUSIVOSDAS PROBABILIDADES

Se A e B forem eventos mutuamente exclusivos $(A \cap B = \phi)$, então:

$$P(A \cup B) = A(A) + P(B)$$

5) REGRA DA SOMA PARA EVENTOS QUE NÃO SÃO MUTUAMENTE EXCLUSIVOSDAS PROBABILIDADES

Se A e B não forem eventos mutuamente exclusivos, então:

$$P(A \cup B) = A(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6) PROBABILIDADE DO EVENTO COMPLEMENTAR $P(\overline{A})$

O evento complementar de A, denotado por $\overline{A}$, é o conjunto de todos os elementos do espaço amostral, que não pertencem a A.

Portanto, a probabilidade de ocorrer o evento complementar de A denotada por $P(\overline{A})$ será dada por:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

7) PROBABILIADE CONDICIONAL

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral S, . A probabilidade de A ocorrer condicionada a B ter ocorrido, será representada por P(A/B), e lida como: “probabilidade de A dado B” ou “probabilidade de A ocorrido B”, e calculada por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

8) REGRA PRODUTO PARA EVENTOS

INDEPENDENTES (“REGRA DO E”) Dois eventos são independentes quando a probabilidade de ocorrer B não é condicional à ocorrência de A. A expressão que define a lei do produto para eventos independentes é a seguinte:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

EXERCICIOS

1) Considere o lançamento de um dado. Calcule a probabilidade de:

a) Sair o número 3:

b) Sair um número par:

c) Sair um múltiplo de 3:

d) Sair um número menor do que 3

e) Sair um quadrado perfeito:

2) Considere o lançamento de dois dados. Calcule a probabilidade de:

a) Sair a soma 8

b) Sair a soma 12

3) Uma urna possui 6 bolas azuis, 10 bolas vermelhas e 4 bolas amarelas. Tirando-se uma bola com reposição, calcule as probabilidades seguintes:

a) Sair bola azul

b) Sair bola vermelha

4) Qual a probabilidade de retirar uma bola vermelha de uma urna contendo 3 bolas brancas, 2 vermelhas e 5 verdes?

a) 40% b) 35% c) 25% d) 20% e) 15%

5) Qual a probabilidade de sorteio de uma bola que não seja branca em uma urna que contem 6 bolas brancas, 2 azuis e 4 amarelas?

a) 2/3 b) 1/2 c) 1/4 d) 2/5 e) 5/12

6) Em um avião viajam 40 brasileiros, 20 japoneses, 8 americanos e 3 árabes. Escolhendo-se ao acaso um passageiro, determine a probabilidade de ele:

a) Ser Árabe

b) Não ser Árabe

c) Ser Brasileiro

7) Qual a probabilidade de obter, no lançamento de um dado, um número par ou primo?

a) 5/6 b) 3/7 c) 1/3 d) 2/5 e) 2/3

8) Dos 100 alunos de uma turma, 40 gostam de álgebra, 30 gostam de geometria, 10 gostam de álgebra e geometria, e há os que não gostam de álgebra nem geometria. Um aluno é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de ele gostar de:

a) Álgebra?

b) Geometria?

c) Álgebra e geometria?

d) Álgebra ou Geometria?

9) Uma urna possui cinco bolas vermelhas e duas bolas brancas. Calcule as probabilidades de:

a) em duas retiradas, sem reposição da primeira bola retirada, sair uma bola vermelha (V) e depois uma bola branca (B).

b) em duas retiradas, com reposição da primeira bola retirada, sair uma bola vermelha e depois uma bola branca.

10) O professor Francisco de Assis realizou uma pesquisa em uma de suas turmas de 2ª série do ensino médio para saber a preferência dos alunos a respeito do tema a ser escolhido para a feira cultural da escola. Assim, apresentou aos alunos dois temas: Cidadania e Meio Ambiente, obtendo os seguintes resultados:

40 alunos escolheram Cidadania;

25 alunos escolheram Meio Ambiente;

10 alunos escolheram ambos os temas;

5 alunos não escolheram nenhum dos dois temas.

Desta forma, selecionando um aluno da sala, a probabilidade dele ter escolhido apenas Meio Ambiente como tema é:

a) 1/ 2 b) 1/ 5 c) 1/ 3 d) 1/ 6 e) 1/ 4

11) Em uma gaiola estão vinte coelhos. Seis deles possuem uma mutação sangüínea letal e três outros uma mutação óssea. Se um coelho for selecionado ao acaso, qual a probabilidade de que não seja mutante?

a)20/11 b) 11/20 c) 6/20 d) 3/20 e)11/40

12) Para uma partida de futebol, a probabilidade de o jogador R não ser escalado é 0,2 e a probabilidade de o jogador S ser escalado é 0,7.

Sabendo que a escalação de um deles é independente da escalação do outro, a probabilidade de os dois jogadores serem escalados é:

a)0,06 b)0,14 c)0,24 d)0,56 e)0,72

13) Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fixas voltadas para baixo, estando representadas em cada uma delas as letras T, V e E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao observá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um premio de R$ 200,00.

30.1) A probabilidade de o participante não ganhar qualquer prêmio é igual a:

a) 0 b) 1/3 c) 1/4 d) 1/2 e) 1/6

30.2) A probabilidade de o concorrente ganhar exatamente o valor de R$ 400,00 é igual a:

a) 0 b) 1/3 c) 1/2 d) 2/3 e) 1/6

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES:

1) Um rapaz estuda em uma escola que fica longe de sua casa, e por isso precisa utilizar o transporte público. Como é muito observador, todos os dias ele anota a hora exata (sem considerar os segundos) em que o ônibus passa pelo ponto de espera. Também notou que nunca consegue chegar ao ponto de ônibus antes de 6 h 15 min da manhã. Analisando os dados coletados durante o mês de fevereiro, o qual teve

21 dias letivos, ele concluiu que 6h e 21 min foi o que mais se repetiu e que a mediana do conjunto de dados é 6h 22min.

A probabilidade de que, em algum dos dias letivos de

fevereiro, esse rapaz tenha apanhado o ônibus antes de 6h 21 min da manhã é no máximo:

A) $\frac{4}{21}$ B) $\frac{5}{21}$ C) $\frac{6}{21}$ D) $\frac{7}{21}$ E) $\frac{8}{21}$

2) O salto ornamental é um esporte em que cada competidor realiza seis saltos. A nota em cada salto é calculada pela soma das notas dos juízes, multiplicada pela nota departida (o grau de dificuldade de cad salto). Fica em primeiro lugar o atleta que obtiver a maior soma das seis notas recebidas.

O atleta 10 irá realizar o ultimo salto da final. Ele observa no Quadro 1, antes de executar o salto, o recorte do quadro parcial de notas com a sua classificação e a dos três primeiros lugares até o momento.

Quadro 1

Classificação	Atleta	6º Salto	Total
1º	3	135,0	829,0
2º	4	140,0	825,2
3º	8	140,4	824,2
6º	10		687,5

Ele precisa decidir com seu treinador qual salto deverá realizar. Os dados dos possíveis tipos de salto estão no quadro 2.

Quadro 2

Tipo de salto	Nota de partida	Estimativa da soma das notas dos juízes	Probabilidade de obter a nota
T1	2,2	57	89,76%
T2	2,4	58	93,74%
T3	2,6	55	91,88%
T4	2,8	50	95,38%
T5	3,0	53	87,34%

O atleta optará pelo salto de maior probabilidade de obter a nota estimada, de maneira que lhe permita alcançar o primeiro lugar.

Considerando essas condições, o salto que o atleta deverá escolher é o de tipo:

A) T1 B) T2 C) T3 D) T4 E) T5

3) Para ganhar um prêmio, uma pessoa deverá retirar, sucessivamente e sem reposição duas bolas pretas de uma mesma urna.

Inicialmente, as quantidades e cores das bolas são como descritas a seguir:

- Urna A – Possui três bolas brancas, duas bolas pretas e uma bola verde;

- Urna B – Possui seis bolas brancas, três bolas

pretas e uma bola verde;

- Urna C – Possui duas bolas pretas e duas bolas verdes;

- Urna D – Possui três bolas brancas e três bolas pretas.

A pessoa deve escolher uma entre as cinco opções apresentadas:

- OPÇÃO 1- Retirar aleatoriamente duas bolas da urna A;

- OPÇÃO 2- Retirar aleatoriamente duas bolas da urna B;

- OPÇÃO 3- Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna A; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;

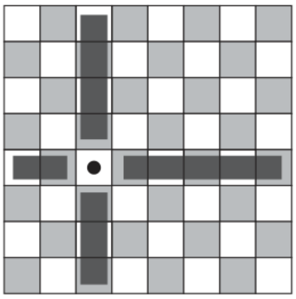
- OPÇÃO 4- Passar, aleatoriamente, uma bola da urna D para a urna C; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna C;

- OPÇÃO 5- Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna D; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna D;

Com o objetivo de obter a maior probabilidade possível de ganhar o prêmio, a pessoa deve escolher a opção:

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

4) Um designer de jogos planeja um jogo que faz uso de um tabuleiro de dimensões n xn , com n $n \geq 2$ no qual cada jogador, na sua vez, coloca uma peça sobre uma das casas vazias do tabuleiro. Quando uma peça é posicionada, a região formada pelas casas que estão na mesma linha ou coluna dessa peça é chamada de zona de combate dessa peça. Na figura está ilustrada a zona de combate de uma peça colocada em uma das casas de um tabuleiro de dimensões 8 x 8.



O tabuleiro deve ser dimensionado de forma que a probabilidade de se posicionar a segunda peça, aleatoriamente, seguindo a regra do jogo e esta ficar sobre a zona de combate da primeira, seja inferior a $\frac{1}{5}$.

A dimensão mínima que o designer deve adotar para

esse tabuleiro é:

A)4 x 4 B)6 x 6 C)9 x 9 D)10 x 10 E)11 x 11

5) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

A)0,075 B)0,150 C)0,325 D)0,600 E)0,800

6) Em um jogo há duas urnas com 10 bolas de mesmo tamanho em cada urna. A tabela a seguir indica as quantidades de bolas de cada cor em cada urna.

Cor	Urna 1	Urna 2
Amarela	4	0
Azul	3	1
Branca	2	2
Verde	1	3
Vermelha	0	4

Uma jogada consiste em:

1º) o jogador apresenta um palpite sobre a cor da bola que será retirada por ele da urna 2;

2º) ele retira, aleatoriamente, uma bola da urna 1 e a coloca na urna 2, misturando-a com as que lá estão;

3º) em seguida ele retira, também aleatoriamente, uma bola da urna 2;

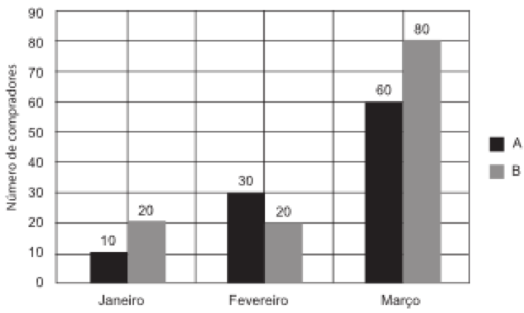
4º) se a cor da última bola retirada for a mesma do palpite inicial, ele ganha o jogo.

Qual cor deve ser escolhida pelo jogador para que ele tenha a maior probabilidade de ganhar?

A) Azul. B) Amarela. C) Branca.

D) Verde. E) Vermelha.

7) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B.

Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

A) $\frac{1}{20}$ B) $\frac{3}{242}$ C) $\frac{5}{22}$ D) $\frac{6}{25}$ E) $\frac{7}{15}$

8) Considere o seguinte jogo de apostas: Numa cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Dentre os números disponíveis, serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele numa mesma cartela. O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade de números escolhidos.

Quantidade de números escolhidos em uma cartela	Preço da cartela (R$)
6	2,00
7	12,00
8	40,00
9	125,00
10	250,00

Cinco apostadores, cada um com R$ 500,00 para apostar, fizeram as seguintes opções:

Arthur: 250 cartelas com 6 números escolhidos;

Bruno: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos;

Caio: 12 cartelas com 8 números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos;

Douglas: 4 cartelas com 9 números escolhidos;

Eduardo: 2 cartelas com 10 números escolhidos.

Os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são

A) Caio e Eduardo. B) Arthur e Eduardo.

C) Bruno e Caio. D) Arthur e Bruno.

E) Douglas e Eduardo.

9) O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20.

A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é

A) 0,02048. B) 0,08192. C) 0,24000.

D) 0,40960. E) 0,49152.

10) Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância proibida. Os organizadores, então, decidiram fazer um exame ***antidoping***. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que irão realizá-lo:

Modo I: sortear três atletas dentre todos os participantes;

Modo II: sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;

Modo III: sortear primeiro três equipes e, então, sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.

Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que P(I), P(II) e P(III) sejam as probabilidades de o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso do sorteio ser feito pelo modo I, II ou III. Comparando-se essas probabilidades, obtém-se

A P(I) < P(III) < P(II)

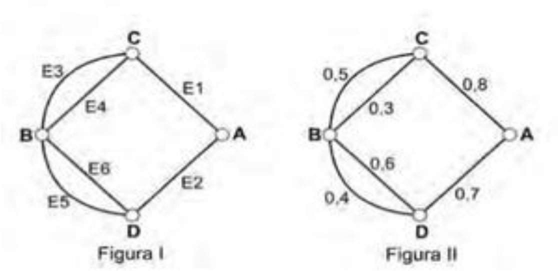
B P(II) < P(I) < P(III)

C P(I) < P(II) = P(III)

D P(I) = P(II) < P(III)

E P(I) = P(II) = P(III)

11) A figura I abaixo mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada. Assim, há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao ponto B, passando pela estrada E4, e de 50%, quando se passa por E3. Essas probabilidades são independentes umas das outras.



(Foto: Reprodução/Enem)

Paula deseja se deslocar da cidade A para a cidade B usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível. O melhor trajeto para Paula é

A) E1E3 B) E1E4 C) E2E4 D) E2E5 E) E2E6.